

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»**

Руководитель программы аспирантуры


В.В.Малыгина,
д.ф.м.н., профессор кафедры ВММБ

«01» июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины
«Спецглавы математики»
по программе аспирантуры**

Научная специальность

1.1.2. Дифференциальные уравнения и
математическая физика

**Направленность (профиль)
программы аспирантуры
Выпускающая(ие) кафедра(ы)**

Функционально-дифференциальные
уравнения
Вычислительная математика, механика и
биомеханика (ВММБ)
Высшая математика (ВМ)

Форма обучения

Очная

Курс: 2

Семестр (ы): 3

Виды контроля с указанием семестра:

Экзамен: - Зачёт: 3

Пермь 2023

1. Общие положения

Рабочая программа дисциплины «Спецглавы математики» разработана на основании следующих нормативных документов:

- Приказ Минобрнауки России от 20.10.2021 N 951 "Об утверждении федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов)";
- Постановление Правительства РФ от 30.11.2021 N 2122 "Об утверждении Положения о подготовке научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре)";
- Самостоятельно устанавливаемые требования к реализуемым программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре Пермского национального исследовательского политехнического университета;
- Базовый план по программе аспирантуры;
- Паспорт научной специальности.

1.1 Цель учебной дисциплины – формирование комплекса знаний, умений и навыков в области исследования динамических систем и оптимального управления с применением аппарата вариационного исчисления и интегральных уравнений.

1.2 Задачи учебной дисциплины:

• формирование знаний

- изучение основных направлений развития теории интегральных уравнений и вариационного исчисления;

• формирование умений

- формирование умения проводить количественные и качественные исследования свойств решений интегральных уравнений;

- формирование умения исследовать экстремальные задачи методами вариационного исчисления;

• формирование навыков

- формирование навыков применения современного аналитического аппарата и компьютерных методов решения вариационных задач и интегральных уравнений.

1.3 Предметом освоения дисциплины являются следующие объекты:

- классические интегральные уравнения;

- классические задачи на минимум или максимум, сводящиеся к исследованию экстремумов функционалов.

1.4 Место учебной дисциплины в структуре образовательной программы.

Дисциплина «Спецглавы математики» является дисциплиной по выбору вариативной части цикла базового учебного плана.

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате изучения дисциплины аспирант должен демонстрировать следующие результаты:

Знать:

- постановки основных задач теории дифференциальных уравнений и задач оптимального управления;
- принципы решения основных исследовательских задач для дифференциальных уравнений и задач оптимального управления.

Уметь:

- применять аппарат интегральных уравнений к исследованию дифференциальных уравнений и систем;
- применять вариационные методы к исследованию задач оптимизации и управления.

Владеть:

- основными аналитическими методами количественного и качественного исследования интегральных уравнений;
- аппаратом вариационного исчисления как одним из базовых инструментов при решении задач оптимизации;
- современными компьютерными методами исследования свойств решений интегральных уравнений и задач оптимизации.

3. Структура учебной дисциплины по видам и формам учебной работы

Объем и виды учебной работы

№ п.п.	Вид учебной работы	Трудоемкость, ч
		3 семестр
1	Аудиторная работа	39
	В том числе:	
	Лекции (Л)	-
	Практические занятия (ПЗ)	32
	Контроль самостоятельной работы (КСР)	7
2	Самостоятельная работа (СР)	69
	Форма итогового контроля:	Зачет

4. Содержание учебной дисциплины

4.1. Содержание разделов и тем учебной дисциплины

Раздел 1. Основы вариационного исчисления (ПЗ – 14 ч, СР – 30 ч).

Тема 1. Предмет вариационного исчисления. Вариация функционала. Уравнение Эйлера. Вариационная задача с закрепленными границами и ее обобщения.

Тема 2. Функционалы с подвижными концевыми точками. Вариационные задачи на условный экстремум.

Тема 3. Достаточные условия экстремума интегрального функционала. Условие Лежандра. Уравнение Якоби, условие Якоби.

Раздел 2. Применение вариационных методов к изучению динамических систем (ПЗ – 8 ч, СР – 18 ч).

Тема 4. Вариационное исчисление в теории оптимизации, в задачах функционального анализа и дифференциальных уравнений.

Тема 5. Приложение вариационных методов к задачам механики. Принцип Гамильтона.

Раздел 3. Интегральные уравнения (ПЗ – 10 ч, СР – 21 ч).

Тема 6. Интегральные уравнения Фредгольма. Связь с краевыми задачами для дифференциальных уравнений, построение оператора Грина.

Тема 7. Интегральные уравнения Вольтерра. Интегральное представление решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в виде оператора Коши.

4.2. Перечень тем практических занятий

Таблица 2

Темы практических занятий

№ п.п.	Номер темы дисциплины	Наименование темы практического занятия	Наименование оценочного средства	Представление оценочного средства
1	1	Вариация функционала. Уравнение Эйлера.	Собеседование.	Вопросы по темам / разделам дисциплины.
2	2	Вариационные задачи на условный экстремум.	Собеседование.	Вопросы по темам / разделам дисциплины.
3	3	Достаточные условия экстремума интегрального функционала.	Собеседование. Творческое задание.	Вопросы по темам / разделам дисциплины. Темы творческих заданий.
4	4	Вариационное исчисление как раздел функционального анализа	Собеседование.	Вопросы по темам / разделам дисциплины.
5	5	Приложение вариационных методов к задачам механики.	Собеседование. Творческое задание.	Вопросы по темам / разделам дисциплины. Темы творческих заданий.
6	6	Интегральные уравнения Фредгольма.	Собеседование. Творческое задание.	Вопросы по темам / разделам дисциплины. Темы творческих заданий.
7	7	Интегральные уравнения Вольтерра.	Собеседование. Творческое задание.	Вопросы по темам / разделам дисциплины. Темы творческих заданий.

4.3. Содержание самостоятельной работы аспирантов

Самостоятельная работа аспирантов заключается в теоретическом изучении конкретных вопросов и выполнении творческих заданий.

Темы самостоятельных заданий

№ п.п.	Номер темы дисциплины	Наименование темы самостоятельной работы	Наименование оценочного средства	Представление оценочного средства
1	1	Вариационная задача с закрепленными границами и ее обобщения.	Собеседование	Вопросы по темам / разделам дисциплины
2	2	Функционалы с подвижными концевыми точками.	Собеседование	Вопросы по темам / разделам дисциплины
3	3	Уравнение Якоби, условие Якоби	Творческое задание	Темы творческих заданий
4	4	Вариационные принципы в теории дифференциальных уравнений	Творческое задание	Темы творческих заданий
5	6	Функция Грина, оператор Грина.	Творческое задание	Темы творческих заданий
6	7	Функция Коши, оператор Коши	Творческое задание	Темы творческих заданий

5. Методические указания для аспирантов по изучению дисциплины

При изучении дисциплины «Спецглавы математики» аспирантам целесообразно выполнять следующие рекомендации:

1. Изучение учебной дисциплины должно вестись систематически.
2. После изучения какого-либо раздела по учебнику или конспектным материалам рекомендуется по памяти воспроизвести основные термины, определения, понятия раздела.
3. Вся тематика вопросов, изучаемых самостоятельно, задается преподавателем. Им же даются источники (в первую очередь вновь изданные в периодической научной литературе) для более детального понимания вопросов, озвученных на лекции.
4. К выполнению практических заданий приступать после самостоятельной работы по изучению теоретических вопросов.

6. Перечень учебно-методического и информационного обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

№	Библиографическое описание (автор, заглавие, вид издания, место, издательство, год издания, количество страниц)	Количество экземпляров в библиотеке+кафедре; местонахождение электронных изданий
1	2	3
1 Основная литература		

№	Библиографическое описание (автор, заглавие, вид издания, место, издательство, год издания, количество страниц)	Количество экземпляров в библиотеке+кафедре; местонахождение электронных изданий
1	2	3
1	Волков, Владимир Тарасович. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление : курс лекций : учебное пособие для вузов / В. Т. Волков, А. Г. Ягола ; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет. — М. : Университет, 2008. — 139 с.	2008 – 32 2007 – 53
2 Дополнительная литература		
2.1 Учебные и научные издания		
1	Демидович, Борис Павлович. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова ; Под ред. Б. П. Демидовича. — 4-е изд., стер. — СПб : Лань, 2008.	30
2	Эльсгольц, Лев Эрнестович. Вариационное исчисление : учебник для вузов / Л.Э. Эльсгольц. — 6-е изд. — М. : КомКнига, 2006. — 205 с.	13
3	Каратеодори, Константин. Вариационное исчисление и дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных : пер. с англ. / К. Каратеодори ; Под ред. С. В. Болотина, И. С. Тайманова. — Москва ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2012. — 552 с.	1
4	Морс, Марстон. Вариационное исчисление в целом : пер. с англ. / М. Морс ; Институт компьютерных исследований. — Москва ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед. : Регуляр. и хаот. динамика, 2010. — 510 с.	1
2.2 Периодические издания		
1	Известия вузов. Математика http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=ivm&option_lang=rus	Общероссийский математический портал
2	Дифференциальные уравнения http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=de&option_lang=rus	Общероссийский математический портал

6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

6.2.1. Лицензионные ресурсы¹

1. Электронная библиотека Пермского национального исследовательского политехнического университета [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных электрон. док., издан. в Изд-ве ПНИПУ] / Перм. нац. исслед. политехн. ун-т, Науч. б-ка. — Пермь, 2016. — Режим доступа: <http://elib.pstu.ru>, свободный. — Загл. с экрана.

2. Электронно-библиотечная система Издательство «Лань» [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных : электрон. версии кн., журн. по гуманитар., обществ., естеств. и техн. наукам] / Электрон.-библ. система «Изд-ва «Лань». — Санкт-

¹ собственные или предоставляемые ПНИПУ по договору

Петербург, 2010-2016. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com>, по IP-адресам компьютер. сети Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

3. ProQuest Dissertations & Theses Global [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных : дис. и дипломные работы на ин. яз. по всем отраслям знания] / ProQuest LLC. – Ann Arbor, 2016. – Режим доступа: <http://search.proquest.com/pqdtglobal/dissertations>, по IP-адресам компьютер. сети Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

4. Электронная библиотека диссертаций РГБ [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных : электрон. версии дис. и автореф. дис. по всем отраслям знания] / Электрон. б-ка дис. – Москва, 2003-2016. – Режим доступа: <http://diss.rsl.ru>, компьютер. сеть Науч. б-ки Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

5. Cambridge Journals [Electronic resource : полнотекстовая база данных : электрон. журн. по гуманитар., естеств., и техн. наукам на англ. яз.] / University of Cambridge. – Cambridge : Cambridge University Press, 1770-2012. – Режим доступа: <http://journals.cambridge.org>. – Загл. с экрана. 11.

6. ScienceDirect [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных : электрон. науч. журн. и кн. по обществ., естеств. и техн. наукам на англ. яз.] / Elsevier B. V. – Amsterdam, 2016. – Режим доступа: <http://www.sciencedirect.com>, по IP-адресам компьютер. сети Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

7. Springer [Электронный ресурс] : [полнотекстовая база данных : электрон. журн., кн. по гуманитар., обществ., естеств. и техн. наукам, протоколы исследований на англ. и нем. яз.] / Springer International Publishing AG, Part of Springer Science+Business Media. – Cham, 2016. – Режим доступа: <http://link.springer.com>, по IP-адресам компьютер. сети Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

8. zbMATH [Электронный ресурс] : [реф.-библиограф. и аналит. база данных по математике на англ. яз.] / FIZ Karlsruhe GmbH. – Berlin, 2016. – Режим доступа: <https://zbmath.org>, по IP-адресам компьютер. сети Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – Загл. с экрана.

6.2.2. Открытые интернет-ресурсы

1. Пермский семинар по функционально-дифференциальным уравнениям - <http://fde-perm.livejournal.com/>

2. Общероссийский математический портал - <http://www.mathnet.ru/>

3. Московский центр непрерывного математического образования – <http://www.mccme.ru>

7. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

7.1. Специализированные лаборатории и классы

Не используется.

7.2. Основное учебное оборудование

Специальное оборудование не требуется.

8. Фонд оценочных средств

Освоение учебного материала дисциплины запланировано в течение двух семестров. В 5 семестре предусмотрены аудиторные лекционные занятия, в 6 семестре - практические занятия, а также самостоятельная работа аспирантов. Формой контроля освоения

результатов по дисциплине является зачет, проводимый с учетом результатов текущего контроля.

Таблица 4

Перечень контролируемых результатов обучения по дисциплине

Контролируемые результаты обучения по дисциплине (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Вид контроля	
	Текущий	Промежуточный (зачёт)
Усвоенные знания		
З.1 знать наиболее актуальные направления развития теории функционально-дифференциальных динамических систем;	С	ТВ
З.2 знать постановки основных задач теории динамических систем, моделируемых посредством дифференциальных уравнений;	С	ТВ
З.3 знать принципы решения основных исследовательских задач для дифференциальных уравнений и систем.	С	ТВ
Освоенные умения		
У.1 выделять формально-абстрактную составляющую в любых динамических процессах, интерпретируя их как функционально-дифференциальную структуру;	ОТЗ	ПЗ
У.2 оценивать возможности исследования количественных и качественных свойств решений дифференциальных уравнений;	ОТЗ	ПЗ
У.3 классифицировать задачи для дифференциальных уравнений по свойствам и методам исследования.	ОТЗ	ПЗ
Приобретенные владения		
В.1 основными аналитическими методами количественного и качественного исследования дифференциальных уравнений;	ОТЗ	ПЗ
В.2 методами математического моделирования динамических систем.	ОТЗ	ПЗ

С – собеседование по теме; ТВ – теоретический вопрос; ТЗ – творческое задание с учетом темы научно-исследовательской деятельности; ОТЗ – отчет по творческому заданию; ПЗ – практическое задание с учетом темы научно-исследовательской деятельности.

Собеседование – средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с аспирантом на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.

Творческое задание - частично регламентированное задание, имеющее нестандартное решение и позволяющее диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.

Итоговой оценкой освоения дисциплинарных частей компетенций (результатов обучения по дисциплине) является промежуточная аттестация в виде зачета, проводимая с учетом результатов текущего контроля.

Контроль качества освоения дисциплины включает в себя текущий контроль успеваемости и промежуточную аттестацию аспирантов.

1.1. Текущий контроль

Текущий контроль успеваемости обеспечивает оценку освоения дисциплин и проводится в форме собеседования и защиты отчета о творческом задании.

- **Собеседование**

Для оценки **знаний** аспирантов проводится собеседование в виде специальной беседы преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной для выяснения объема знаний по определенному разделу, теме, проблеме.

Собеседование может выполняться в индивидуальном порядке или группой аспирантов.

- **Защита отчета о творческом задании**

Для оценки **умений и владений** аспирантов используется творческое задание, имеющее нестандартное решение и позволяющее интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.

Творческие задания могут выполняться в индивидуальном порядке или группой аспирантов.

1.2. Промежуточная аттестация

Допуск к промежуточной аттестации осуществляется по результатам текущего контроля. Промежуточная аттестация проводится в виде в устно-письменной форме по билетам. Билет содержит теоретические вопросы (ТВ) для проверки знаний и практическое задание (ПЗ) для проверки умений и владений заявленных дисциплинарных частей компетенций.

Билет формируется таким образом, чтобы в него попали вопросы и практические задания, контролирующие уровень сформированности всех заявленных дисциплинарных компетенций. Пример билета представлен в приложении 1.

Типовые шкалы и критерии оценки результатов обучения при сдаче зачета для компонентов *знать, уметь и владеть* приведены в табл. 5.

Шкала оценивания уровня знаний, умений и владений на зачете

Таблица 5

Оценка	Критерии оценивания
<i>Зачтено</i>	Аспирант продемонстрировал сформированные или содержащие отдельные пробелы знания при ответе на теоретический вопрос билета. Показал сформированные или содержащие отдельные пробелы знания в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов правильно. Аспирант выполнил контрольное задание билета правильно или с небольшими неточностями. Показал успешное или сопровождающееся отдельными ошибками применение навыков полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов правильно.
<i>Не зачтено</i>	При ответе на теоретический вопрос билета аспирант продемонстрировал фрагментарные знания . При ответах на дополнительные вопросы было допущено множество неправильных ответов. При выполнении контрольного задания билета аспирант продемонстрировал частично освоенное умение и применение полученных навыков при решении профессиональных задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы было допущено множество неточностей.

9. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине

Задания для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны

быть направлены на оценивание:

1. уровня освоения теоретических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности аспиранта применять теоретические знания и профессионально значимую информацию и оценивание сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Задания для оценивания когнитивных умений (знаний) должны предусматривать необходимость проведения аспирантом интеллектуальных действий:

- по дифференциации информации на взаимозависимые части, выявлению взаимосвязей между ними и т.п.;
- по интерпретации и творческому усвоению информации из разных источников, ее системного структурирования;
- по комплексному использованию интеллектуальных инструментов учебной дисциплины для решения учебных и практических проблем.

При составлении заданий необходимо иметь в виду, что они должны носить практико-ориентированный комплексный характер и формировать закрепление осваиваемых компетенций.

10. Типовые контрольные вопросы и задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

10.1. Типовые творческие задания:

1. Провести сравнение определения вариации функционала с производными:
а) по Фреше; б) по Гато.
2. Обобщить основную лемму вариационного исчисления на случай произвольного конечномерного пространства.
3. Доказать неравенство Виртингера методами вариационного исчисления.
4. Найти необходимое и достаточное условие разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма с вырожденным ядром в терминах ортогональности правой части решению однородного сопряженного уравнения.
5. Доказать, что спектр линейного интегрального оператора Вольтерра состоит только из нуля и построить резольвенту этого оператора.

10.2. Типовые контрольные вопросы для оценивания знаний на зачете по дисциплине:

1. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала.
2. Вторая вариация функционала. Достаточное условие экстремума функционала.
3. Вариационные методы в механике. Принцип Гамильтона.
4. Интегральное представление решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (оператор Коши).
5. Интегральное представление решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка (оператор Грина).

10.3. Типовые контрольные задания для оценивания приобретенных умений и владений на зачете по дисциплине:

1. Для уравнения $x(t) = \lambda \int_0^t t^2 s x(s) ds + f(t)$, рассматриваемого в пространстве непрерывных на $[0, b]$ функций, построить резольвенту и найти интегральное представление решения при любой f .
2. Для линейного уравнения Вольтерра $x(t) = \lambda \int_0^t K(t, s)x(s) ds + f(t)$ задать итерационную процедуру построения резольвенты. Доказать, что данная процедура сходится и дать оценку скорости сходимости.
3. Среди кривых, соединяющих две заданные точки, найти такую, при вращении которой вокруг горизонтальной оси, образуется тело с минимальной поверхностью. Найти условия разрешимости задачи и приближенный метод вычисления параметров экстремали.
4. Среди ограниченных плоских областей заданной площади найти такую, у которой граница имеет минимальную длину.
5. Найти минимум функционала $\int_0^1 \dot{x}^2(s) ds$, рассматриваемого на множестве дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций, удовлетворяющих условиям: $x(0) = x(1) = 0$, $\int_0^1 x^2(s) ds = 1$.
6. Пусть $K(t, s) = K(s, t)$, а λ не является характеристическим числом оператора $Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) ds$. Доказать, что решение уравнения $x - \lambda A = f$ в пространстве L_2 можно представить в виде ряда Фурье по системе собственных функций оператора A .

Полный комплект вопросов и заданий для сдачи зачета в форме утвержденных билетов хранится на кафедре «Вычислительная математика, механика и биомеханика».

Дисциплина
«Спецглавы математики»

БИЛЕТ № 1

1. Достаточное условие экстремума функционала.
2. Найти все $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых уравнение $x(t) = \lambda \int_0^1 (t^2 s - s^2 t) x(s) ds + t$ имеет решения в пространстве непрерывных на $[0, 1]$ функций, и построить их.
3. Найти уравнение геодезических линий прямого кругового цилиндра.

Заведующий кафедрой ВММБ _____

(подпись)

Столбов В.Ю.

« ____ » _____ 202 ____ г.

Лист регистрации изменений

№ п.п.	Содержание изменения	Дата, номер протокола заседания кафедры. Подпись заведующего кафедрой
1	2	3
1		
2		
3		
4		